Problem 1

假设简单图G有n>2个顶点, 各顶点的度数均不相同. 有n个顶点的无向图中

顶点的最大度数为n-1, 则这n个顶点的度数依次为0, 1, 2, …, n-1

其中度数为n-1的顶点与其余n-1个顶点均邻接, 故度数为0的顶点不存在

矛盾, 故若无向图G至少有两个顶点且各顶点度数均不相同, 则G不是简单图

Problem 2

a) 由Problem 1结论可得, 序列不能作为简单图的度序列

b)

c) 不能, 图中共6个点, 顶点度数最大为5, 该顶点与其余5个顶点均邻接

有3个顶点度数为1, 则它们只与度数为5的顶点邻接

其余两顶点若邻接度数均为2, 若不邻接均为1, 不可能有度数为4的顶点

d)

Problem 3

无向图G有E条边, 则V个顶点度数之和为2E, 对最小度δ(G)有δ(G)·V ≤ 2E

对最大度△(G)有△(G)·V ≥ 2E, 则有δ(G) ≤ 2E/V ≤ △(G)

Problem 4

a) 设无向图G有E条边, V个顶点, 2E=Va, 删去一个顶点x后的边数

2E’=(V-1)a’≥(V-1)a. 则去掉的边数△E = E-E’ = Va/2 – (V-1)a’/2 ≤ a/2

则删去顶点x的度deg(x) =△E≤a/2

b) 设G的所有子图最小度都小于等于a/2, 因为G是G的子图, 所以

G的最小度小于等于a/2, 由1)得G删去度最小的顶点x后平均度至少为a

所得这个无向图G’是G的子图, 若G’的所有子图最小度仍小于等于a/2

则重复上述步骤, 易见G中不可能所有顶点的度都小于等于a/2

否则G的顶点平均度小于等于a/2, 与G的顶点平均度为a矛盾

重复至某一步时一定可以得到G的非空子图, 有一个最小度大于a/2的子图

Problem 5

S6 ●

S5 ●

S4 ●

S2 ●

S1 ● S3 ●

Problem 6

不包含三角形K3子图的n阶图, 能够对图中的每个顶点赋予两种不同的颜色

则这样的n阶图都是二分图, 假设两个顶点集分别有k和n-k个顶点

则其边数f(k)=k(n-k), 当且仅当k=n/2时f(k)取得最小值为n²/4, 即m≤n²/4